Spis treści

Statystyka Matematyczna
Skrypt

SKN
Matematyki Stosowanej

s k n
· · ·
· m s

11 czerwca 2006

7 Tabela rozkładów ciągłych

Nazwa	Funkcja gęstości	Parametry	EX	D^2X	Dystrybuanta	F. tworząca
Jednostajny	$\chi_{<a,b>}\frac{1}{b-a}$	$a < b$	$\frac{1}{2}(a+b)$	$\frac{1}{12}(b-a)^2$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$
Normalny	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	$\sigma > 0$	m	σ		
Trójkątny	$\frac{1}{a}(1-\frac{\lvert x\rvert}{a})$	$\lvert x\rvert < a$	0	$\frac{2}{3}a^2$		
Log-normalny	$\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\ln(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	$\sigma > 0$	$e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}$	$(e^{\sigma^2-1})e^{2m+\sigma^2}$		
Pareto	$\chi_{<b,\infty)}ab^a x^{-(a+1)}$	$a, b > 0$	$\frac{ba}{a-1}\ : a > 1$	$\frac{b^2 a}{(a-1)^2(a-2)}\ : a > 2$	$1-(\frac{b}{x})^k$	
Wykładniczy	$\chi_{R_{++}}\lambda e^{-\lambda x}$	$\lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$1-e^{-\lambda x}$	$(1-\frac{it}{\lambda})^{-1}$
Gamma $\Gamma(\lambda, s)$	$\chi_{R++}\frac{\lambda^s}{\Gamma(s)}x^{s-1}e^{-\lambda x}$	$s > 0$	$\frac{s}{\lambda}$	$\frac{s}{\lambda^2}$		$(1-\theta it)^{-k}$
Beta	$\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}x^{p-1}(1-x)^{q-1}$	$x, p, q > 0\, x < 1$	$\frac{p}{p+q}$	$\frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$		
Laplace'a	$\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{\lvert x-m\rvert}{\sigma}}$	$\sigma > 0$	m	$2\sigma^2$		
Cauchy'ego	$\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$		-	-	$\frac{1}{\pi}\arctan(x)+\frac{1}{2}$	
Uog. Cauchy'ego	$\frac{1}{\pi}\frac{b}{b+(x-a)^2}$	$b > 0$	-	-		
Weibulla	$s\lambda x^{s-1}e^{\lambda x^s}$	$\lambda, s > 0$	$\frac{1}{\lambda}^{\frac{1}{s}}\Gamma(1+\frac{1}{s})$	$\frac{1}{\lambda}^{\frac{2}{s}}\Gamma(1+\frac{2}{s})-\Gamma^2(1+\frac{1}{s})$		
Chi-kw (1 df)	$\frac{1}{\sqrt{2e\pi x}}$		1	2		$(1-2it)^{\frac{-1}{2}}$
Chi-kw (n df)	$\frac{x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}}$		n	$2n$		$(1-2it)^{\frac{-n}{2}}$
T-studenta (n df)	$\frac{\Gamma(\frac{1+n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n}(1+\frac{x^2}{n})^{\frac{n+1}{2}}}$	$n > 2$	0	$\frac{n}{n-2}$		
Snedecora	$\frac{(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}}{B(\frac{m}{2},\frac{n}{2})(1+\frac{mx}{n})^{(m+n)/2}}$	$m > 0 \wedge n \in N$	$\frac{n}{n-2} \wedge n > 2$	$\frac{2n^2(n+m-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \wedge n > 4$		
Logistyczny	$\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{(1+e^{-\lambda x})^2}$	$\lambda > 0$				
Maxwella	$\chi_{R++}\frac{4\lambda^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}x^2 e^{-\frac{x^2}{\lambda}}$	$\lambda > 0$	$2\ \square\ \frac{\lambda}{\pi}$	$\frac{3\pi-8}{2\pi}\lambda$		
Rayleigha	$\chi_{R++}\frac{2}{\lambda}xe^{-\frac{x^2}{\lambda}}$	$\lambda > 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{\lambda\pi}$	$\frac{4-\pi}{4}\lambda$	$1-\exp(\frac{-x^2}{2\sigma^2})$	

6 Tabela rozkładów dyskretnych

Nazwa	$P(X = k)$	EX	D^2X	Dystrybuanta	F. tworząca
Zerojedynkowy	$P(1) = p \quad P(0) = 1 - p$	p	$1 - p$		
Dwupunktowy	$p^k(1-p)^{1-k}$				
Równomierny	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$		
Dwumianowy	$\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$		
Poissona	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ	$\frac{\Gamma(k+1,\lambda)}{k!}$	$exp(\lambda(e^{it}-1))$
Geometryczny	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$		
Hipergeometryczny	$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$n\frac{M}{N}$	$\frac{n\frac{M}{N}(1-\frac{M}{N})(N-n)}{(N-1)}$		
Uj. dwumianowy (Pascala)	$\binom{k-1}{m-1} p^m(1-p)^{k-m}$	$\frac{m}{p}$	$\frac{m(1-p)}{p^2}$		
Logarytmiczny	$-\frac{\theta^k}{k\log(1-\theta)}$				

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$$
$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$
$$\Gamma(n) = (n-1)! \wedge n \in N$$
$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$$
$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Autorzy
Katarzyna Łuckowska
Marcin Szymański
Paweł Wietraszuk

Niniejszy skrypt napisany został jako pomoc dla studiujących statystykę matematyczną.
Wszelkie teksty w nim zawarte stanowią własność intelektualną autorów.

Pracę złożono w języku LaTeX 2_ε

1 Oznaczenia i definicje

Ozn. 1 (Przestrzeń parametrów). Θ

Ozn. 2 (Przestrzeń prób). $\mathfrak{X} \in \mathrm{R}^{\mathbf{n}}$

Ozn. 3 (Obserwacja losowa). *wektor losowy* $X \in \mathfrak{X}$

Ozn. 4 (Rodzina rozkładów prawdopodobieństwa). $\{P_\theta : \theta \in \mathfrak{X}\}$

Def. 5 (Model statystyczny; Przestrzeń statystyczna).

$$(\mathfrak{X}, S, \{P_\theta : \theta \in \mathfrak{X}\}) \wedge S = B(\mathfrak{X})$$

Def. 6 (Identyfikowalność). *Własność modelu:* $\theta_1 \neq \theta_2 \Rightarrow P_{\theta_1} \neq P_{\theta_2}$

Def. 7 (Statystyka). *Funkcja* $t : \mathfrak{X} \to \mathrm{R}^{\mathbf{k}}$ *taka, że* $\forall X \in \mathfrak{X}$ $t(x)$ *jest zmienną losową na* $(\mathfrak{X}, S, \{P_\theta : \theta \in \mathfrak{X}\}) \wedge S = B(\mathfrak{X})$

Def. 8 (Statystyka k-wymiarowa). $T : R^n \to R^k$ $T(X_1, \ldots, X_n) \wedge X_1, \ldots, X_n \sim iid\, F$

Def. 9 (k-ta statystyka pozycyjna). $X_{k:n}$ *k-ta liczba w rosnąco uporządkowanym ciągu*

Def. 10 (Mediana).

$$M_e = \begin{cases} X_{\frac{n+1}{2}:n} \iff n \equiv (1 mod 2) \\ \frac{1}{2}(X_{\frac{n}{2}:n} + X_{\frac{n}{2}+1:n}) \iff 2 \mid n \end{cases}$$

Def. 11 (Dystrybuanta empiryczna). $\hat{F}_n(t) = \frac{card\{x_i : x_i \leqslant t\}}{n}$

Tw. 1 (Gliwenko-Cantelli).

$$\sup_t |F(t) - \hat{F}_n(t)| \ \overrightarrow{n \to \infty}\ 0$$

Tw. 2 (Własności dystrybunaty empirycznej).

1. $\forall t \in \mathbb{R} \quad F_n(t, \underline{X}) \xrightarrow{1} F(t)$
2. $\forall n\, \forall t \in \mathbb{R} \quad E_F F_n(t, \underline{X}) = F(t)$
3. $\sqrt{n}\frac{F_n(t,\underline{X}) - F(t)}{\sqrt{F(t)[1-F(t)]}} \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

2 Wnioskowanie statystyczne

2.1 Statystyki dostateczne

Def. 12 (Statystyka dostateczna). T*, że rozk. warunkowy* $P_\theta\{\cdot|T = t\}$ *nie zależy od* θ

Def. 13 (Statystyka dostateczna). *Statystyka dostateczna dla* θ *to taka, która generuje podział dostateczny przestrzeni prób.*

Tw. 3 (O faktoryzacji). T *jest dostateczna* $\iff$

$$f_\theta(\mathrm{x}_\mathbf{n}) = g_\theta(T(\mathrm{x}_\mathbf{n}))h(\mathrm{x}_\mathbf{n})$$

g_θ *- zależy od* θ*, zależy od* $\mathrm{x}_\mathbf{n}$ *tylko przez* T
h *- nie zależy od* θ*, zależy od* $\mathrm{x}_\mathbf{n}$

Def. 14 (Podział dostateczny). *Podział* $\mathfrak{A}$ *przestrzeni prób* $\mathfrak{X}$ *jest dostateczny dla* θ*, jeśli przy każdym ustalonym zbiorze* $A \in \mathfrak{A}$ *rozkład warunkowy próby pod warunkiem* A *nie zależy od* θ*.*

Def. 15 (Konstrukcja minimalnego podziału dostatecznego). *(do napisania)*

Def. 16 (Minimalna statystyka dostateczna). *Statystyka* S *jest minimalna statystyką dostateczną* $\iff$ *gdy dla każdej innej statystyki dostatecznej* T *istnieje funkcja* h *taka, że* $S = h(T)$*.*

Def. 17 (Minimalna statystyka dostateczna). *Minimalna statystyka dostateczna dla* θ *to taka, która generuje minimalny podział dostateczny przestrzeni prób.*

Def. 18 (Statystyka zupełna). *Statystyka* $T = T(X)$ *jest zupełna, jeżeli dla wszystkich* $\theta \in \Theta$ *z równości* $E_\theta h(T) = 0$ *wynika że* $h \equiv 0$ *z prawdopodobieństwem 1 na zbiorze wartości* T*.*

Def. 19 (Statystyka swobodna wzgl. θ). *Statystyka, której rozkład nie zależy od* θ*.*

Def. 20 (Statystyka swobodna I rzędu). *Statystyka, której wartość oczekiwana nie zależy od* θ*.*

Tw. 4 (Basu). *Jeżeli* T *jest statystyką dostateczną zupełną dla* θ*, a* V *statystyką swobodną, to* T *i* V *są niezależnymi zmiennymi losowymi.*

Tw. 5. *Minimalna statystyka dostateczna nie musi być zupełna*

Tw. 6. *Jeżeli* T *jest statystyką dostateczną zupełną to jest mininimalną statystyką dostateczną*

5.6 Nierówności

Tw. 87 (Schwarz). *Jeśli* $EX^2 < \infty$ *i* $EY^2 < \infty$*, to*

$$E(|XY|) \leqslant \sqrt{EX^2} \cdot \sqrt{EY^2},$$

ponadto równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy X *i* Y *są liniowo zależne.*

Tw. 88 (Jensen). *Niech* $E|X| < \infty$ *oraz* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *wypukła, taka że* $E|g(X)| < \infty$*, wtedy*

$$g(EX) \leqslant Eg(X).$$

Tw. 89 (Czebyszew). *Niech* X *będzie nieujemną zmienną losową. Wtedy dla każdego* $\varepsilon > 0$

$$P(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{EX}{\varepsilon}.$$

Tw. 90 (Czebyszew). *Niech* $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *borelowska, niemalejące i dodatnia, wtedy*

$$P(|X| > a) \leqslant \frac{Eg(|X|)}{g(a)}$$

[Przykład] Dla $g(x) = x^2$ *i* $X := X - EX$ *otrzymujemy*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|X - EX| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{Var\ X}{\varepsilon^2}.$$

Tw. 91 (Hölder). *Niech* $p, q > 1$ *oraz* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *i* $E|X|^p < \infty$*,* $E|Y|^q < \infty$*, wtedy* $E|XY| < \infty$ *oraz*

$$E|XY| \leqslant (E|X|^p)^{\frac{1}{p}} (E|Y|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Tw. 92 (Minkowski). *Niech* $p \geqslant 1$ *wtedy*

$$(E|X+Y|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant (E|X|^p)^{\frac{1}{p}} + (E|Y|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Tw. 93 (Kołomogorow). *Niech* $X_1, ..., X_n$ *będą niezależnymi zmiennymi losowymi, takimi że* $EX_i = 0$ *i* $EX_i^2 < \infty$ *i* $= 1, ..., n$*. Jeśli* $\exists c > 0$*, że* $P(|X_i| \leqslant c) = 1, \quad i = 1, ..., n$ *to*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{(c+\varepsilon)^2}{ES_n^2},$$

gdzie $S_n = X_1 + ... + X_n$*.*

5.5 Centralne Twierdzenia Graniczne

Tw. 79 (CTG). *Niech $X_1, X_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie oraz niech $EX = 0$ i $VarX = 1$. Wtedy*

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Tw. 80. *Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, niech $EX_1 = \mu$ i $VaRX_1 = \sigma^2$. Wtedy dla każdego ε*

$$P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant \varepsilon\right) \to_{n\to\infty} \Phi(\varepsilon).$$

Tw. 81 (Lindeberga-Levy'ego). *Jeżeli zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o jednakowych rozkładach z parametrami $EX_k = \mu$, $VaRX_k = \sigma^2$ dla k=1,2,..., to*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant b\right) = \Phi(b) - \Phi(a),$$

gdzie Φ jest dystrybuantą rozkładu normalnego $N(0,1)$. Oznacza to, że suma S_n ma rozkład asymptotycznie normalny $N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$.

Tw. 82 (de Moivre'a-Laplace'a). *Jeżeli zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o jednakowych rozkładach dwupunktowych $Bern(p)$, to*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant b\right) = \Phi(b) - \Phi(a),$$

gdzie Φ jest dystrybuantą rozkładu normalnego $N(0,1)$. Oznacza to, że suma S_n ma rozkład asymptotycznie normalny $N(np, \sqrt{npq})$.

Tw. 83 (Berry-Esséen). *Jeżeli (X_n) jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie i $E|X_1|^3 < \infty$ to,*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| P\left(\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{VaRS_n}} \leqslant t\right) - \Phi(t)\right| \leqslant C\frac{E|X_1 - EX_1|^3}{\sigma^3\sqrt{n}},$$

gdzie $\sigma = \sqrt{VaRX_1}$ oraz $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \leqslant C < 0,8$.

Tw. 84 (Poissona). *Jeżeli zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o rozkładach dwumianowych $Bin(n, p_n)$ i jeśli $np_n = \lambda$ dla n=1,2,..., to*

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-k)!k!} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Def. 86 (Warunek Lindeberga). *Ciąg zmiennych losowych (X_n) spełnia warunek Lindeberga, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$*

$$\frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} E[(X_k - EX_k)^2 \mathbb{1}_{\{|X_k - EX_k| > \varepsilon s_n\}}] \to_{n\to\infty} 0,$$

gdzie $s_n^2 = \sum_{k=1}^n VaRX_k$.

Def. 87 (Warunek Lapunowa). *Ciąg zmiennych losowych (X_n) spełnia warunek Lapunowa, jeśli dla wszystkich k naturalnych i dla pewnego $\delta > 0$ jest $E|X_k|^{2+\delta} < \infty$ oraz*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} E|X_k - EX_k|^{2+\delta} = 0.$$

Lem. 85. *Warunek Lapunowa pociąga za sobą warunek Lindeberga.*

Tw. 86. *Jeśli ciąg niezależnych zmiennych losowych (X_n) spełnia warunek Lindeberga, to*

$$P\left(\frac{S_n - ES_n}{s_n} \leqslant a\right) \to_{n\to\infty} \Phi(a)$$

jednostajnie względem a.

2.1.1 Rodzina rozkładów wykładniczych

Def. 21 (Rodzina rozkładów wykładniczych). *Rodzina rozkładów $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ taka, że każdy rokład jest postaci*

$$p_\theta(x) = e^{\sum_{j=1}^{k} c_j(\theta)T_j(x) - b(\theta)} h(x)$$

i $T_1, \ldots, T_k$ są liniowo niezależne, a $c_1, \ldots, c_k$ tworzą k-wymiarowy zbiór

Tw. 7. *Dla rodziny wykładniczej*

$$(T_1(X), \cdots, T_k(X))$$

jest minimalną statystyką dostateczną oraz statystyką zupełną.

Tw. 8. *Dla próby z rodziny wykładniczej*

$$\left(\sum_i T_1(X_i), \cdots, \sum_i T_k(X_i)\right)$$

jest statystyką dostateczną zupełną.

2.2 Rozkłady niektórych statystyk

Def. 22 (Średnia). $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$

- *Jest nieobciążonym estymatorem wartości oczekiwanej*
- *Jest zgodnym estymatorem wartości oczekiwanej*

Tw. 9. $Var(\overline{X}) = \frac{1}{n} Var(X)$

Def. 23 (Wariancja z próby). $S^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \overline{X})^2$

- *Jest obciążonym estymatorem wariancji $S^2(X) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$*

Tw. 10 (Fisher). *Jeżeli $X_1, \ldots, X_n \sim iid\, N(m, \sigma^2)$ to*

1. *$\overline{X}, S^2$ są niezależne*
2. $\overline{X} \sim (m, \frac{\sigma^2}{n})$
3. $\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

Tw. 11. *Jeżeli $X_1, \ldots, X_k \sim iid\, N(0,1)$ to*

1. $\sum X_i^2 \sim \chi^2_k$
2. $E(\sum X_i^2) = \sum_{i=1}^k EX_i^2 = k$

Tw. 12. *Jeżeli $Y_1, \ldots, Y_m$ są niezależne $\wedge Y_i \sim \chi^2_{v_i}$ to*

$$\sum Y_i \sim \chi^2_{\sum v_i}$$

Tw. 13. *Jeżeli $X_1, \ldots, X_{n1} \sim iid\, N(m_1, \sigma_1^2) \wedge Y1, \ldots, Y_{n2} \sim iid\, N(m_2, \sigma_2^2)$ to*

$$\frac{n_1 S_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{n_2 S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{n_1+n_2-2}$$

Tw. 14 (Gosset). *Jeżeli X, Y są niezależne $\wedge X \sim N(0,1) \wedge Y \sim \chi^2_v$ to*

1. $\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{v}}} \sim t_v$
2. $\frac{\sqrt{v}\frac{\overline{X}-m}{\sigma^2}}{\sqrt{\frac{\frac{vS^2}{\sigma^2}}{v-1}}} = \frac{\overline{X}-m}{S}\sqrt{v-1} \sim t_{v-1}$

Tw. 15. *Jeżeli X, Y są niezależne $\wedge X \sim \chi^2_{v_1} \wedge Y \sim \chi^2_{v_2}$ to*

$$F = \frac{\frac{X}{v_1}}{\frac{Y}{v_2}} \sim F_{v_1,v_2}$$

Lem. 16. *(Na mocy CTG) Jeżeli X ma rozkład dwumianowy to*

$$\frac{\overline{X}-np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(np, \sqrt{np(1-p)})$$

Uwaga: Jeżeli nie znamy p to przy konstruowaniu przedziału ufności zakładamy najgorszy przypadek $p = \frac{1}{2}$

Tw. 17. $X_1, \dots, X_{n1}\, iid \sim N(m_1, \sigma_1^2) \wedge S_1^2 = \frac{1}{n_1}\sum(X_i - \overline{X})^2 \wedge Y_1, \dots, Y_{n2}\, iid \sim N(m_2, \sigma_2^2) \wedge S_2^2 = \frac{1}{n_2}\sum(Y_i - \overline{Y})^2$

$$F = \frac{\frac{\frac{n_1 S_1^2}{\sigma_1}}{n_1-1}}{\frac{\frac{n_2 S_2^2}{\sigma_2}}{n_2-1}} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

Tw. 18 (Rozkład k-tej statystyki pozycyjnej).

$$F_{X_{k:n}} = P(X_{k:n} < x) = \sum_{i=k}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!}(F(x))^i(1-F(x))^{n-i} =$$
$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^{F(x)} t^{k-1}(1-t)^{n-k}dt$$
$$f_{X_{k:n}} = P(X_{k:n} = x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}(F(x))^{k-1}(1-F(x))^{n-k}f(x)$$

2.3 Estymatory

2.3.1 Definicje

Def. 24 (Estymator). *Statystyka $T(X_1, X_2, ..., X_n)$, której rozkład zależy od pewnego parametru θ rozkładu populacji, Dla $(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n)$, liczbę $T(x_1, x_2, ..., x_n)$ nazywamy wartością estymatora.*

Def. 25 (Kwadratowa funkcja straty estymatora T). $L(T, \theta) = \left(T(x) - g(\theta)\right)^2$

Def. 26 (Ryzyko estymatora T; Błąd średniokwadratowy). $R_T(\theta) = E_\theta L(T, \theta)$

Tw. 19. *Jeżeli T jest estymatorem θ to dla jego ryzyka zachodzi*

$$R_T(\theta) = VarT(x) + (ET(x) - \theta)^2$$

Def. 27 (Najlepszy estymator).

$$T_0 : \forall_{\theta\in\Theta} \forall_{T\in D}\, R_{T_0}(\theta) \leqslant R_T(\theta)$$

gdzie D - zbiór estymatorów

Def. 28 (Estymator zgodny). *Estymator $U_n(\omega, \theta) = f(X_1(\omega), X_2(\omega), ..., X_n; \theta)$ parametru θ jest zgodny, gdy jest on zbieżny według prawdopodobieństwa do parametru θ, tzn. gdy*

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{n\to\infty} P(\{\omega : |U_n(\omega; \theta) - \theta| > \varepsilon\}) = 0$$

Def. 29 (Estymator nieobciążony). *Estymator U_n jest nieobciążonym estymatorem parametru θ* $\iff$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad E(U_n) = \theta$$

Def. 30 (Estymator asymptotycznie nieobciążony). *Estymator U_n jest asymptotycznie nieobciążonym estymatorem parametru θ* $\iff$

$$\lim_{n\to\infty} E(U_n) = \theta$$

Tw. 20. *Jeżeli $\lim_{n\to\infty} E_\theta U_n = \theta$ (przynajmniej asymptotycznie nieobciążony) oraz $\lim_{n\to\infty} D^2 U_n = 0$, to U_n jest zgodnym estymatorem parametru θ.*

Def. 31 (Obciążenie estymatora). $E(U_n) - \theta$

Def. 32 (Estymator NMW). *Estymatorem nieobciążonym o minimalnej wariancji parametru θ nazywamy ten spośród nieobciążonych estymatorów tego parametru, który ma najmniejszą wariancję.*

Tw. 71 (SPWL Markowa). *Niech (X_n) będzie ciągiem zmiennych losowych takich, że*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{VaRS_n}{n^2} = 0,$$

wtedy (X_n) spełnia SPWL.

Tw. 72 (PWL Czebyszewa lub Markowa). *Niech (X_n) będzie ciągiem zmiennych losowych niezależnych o skończonych wariancjach $\sigma_n^2 = VaRX_n$, n=1,2,... . Jeżeli*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 = 0,$$

to ciąg (X_n) spełnia SPWL.

Tw. 73 (SPWL Czebyszewa). *Jeśli X_n są niezależne lub parami nieskorelowane i mają wspólnie ograniczone wariancję, tj.*

$$\exists K \quad VaR\, X_i < K \quad i = 1, 2, ...$$

to ciąg (X_n) spełnia SPWL.

Tw. 74 (PWL Chinczyna). *Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie i skończonej wartości oczekiwanej μ. Wtedy ciąg (X_n) spełnia SPWL, tzn.*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - \mu\right| \leqslant \varepsilon\right) = 1.$$

5.4.2 Mocne prawa wielkich liczb

Def. 85 (MPWL). *Mówimy, że ciąg (X_n) spełnia mocne prawo wilkich liczb, jeżeli ciąg zmiennych losowych $(\frac{1}{n}(S_n - ES_n))$ jest zbieżny do zera z prawdopodobieństwem 1, tzn. dla kazdego $\varepsilon > 0$*

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - ES_n}{n} = 0\right) = 1.$$

Tw. 75 (MPWL Bernoulliego). *Oznaczmy przez S_n liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego n prób z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie równym p. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{k\geqslant n}\left|\frac{S_k}{k} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) = 1.$$

Tw. 76 (Twierdzenie Kołomogorowa). *Jeśli $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $VaRX_n < \infty$, n=1,2,..., przy czym*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{VaRX_n}{n^2} < \infty,$$

to z prawdopodobieństwem 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - ES_n}{n} = 0.$$

Tw. 77 (MPWL Kołomogorowa). *Jeżeli $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, $E|X_1| < \infty$, to (X_n) spełnia MPWL, czyli*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = EX_1$$

z prawdopodobieństwem 1.

Lem. 78. *Jeśli $X_1, X_2, ...$ takie, że $EX_n = \mu$ dla $n = 1, 2, ...$ to jeśli*

$$P(\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{\mu} = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad MPWL \text{ nie zachodzi}$$

d) Jeżeli $X_n \xrightarrow{1} X$, $EX_n \to EX$ *to* $X_n \xrightarrow{L^1} X$,

e) Jeżeli $X_n \xrightarrow{P} X$, *to istnieje podciąg* (X_{n_k}) *taki, że* $X_{n_k} \xrightarrow{1} X$.

Tw. 64. *Jeżeli* P *jest rozkładem dyskretnym, to dla zmiennych losowych określonych na przestrzeni probabilistycznej* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *zachodzi równoważność:*

$$X_n \xrightarrow{1} X \quad \Leftrightarrow \quad X_n \xrightarrow{P} X.$$

Def. 81. *Rodzinę zmiennych losowych* $\{X_t : t \in T\}$ *nazywamy jednostajnie całkowalną, jeżeli*

$$\lim_{C\to\infty} \sup_{t\in T} E\left(|X_t| \cdot I_{\{|X_t|>C\}}\right) = 0.$$

Lem. 65. *Jeżeli* $|X_t| \leqslant Y$ *dla* $t \in T$, $EY < \infty$, *to rodzina zmiennych losowych* $\{X_t : t \in T\}$ *jest jednostajnie całkowalna.*

Tw. 66. $X_n \xrightarrow{L^p} X$ *dla* $p \geqslant 1$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

i) $X_n \xrightarrow{P} X$,

ii) Rodzina $\{|X_n|^p\}$ *jest jednostajnie całkowalna.*

Def. 82. *Niech* $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ *będzie ciągiem rozkładów prawdopodobieństwa na* $(E, \mathcal{B}(E))$. *Mówimy, że jest on słabo zbieżny do rozkładu* μ *jeżeli dla każdej funkcji ciągłej i ograniczonej* $f : E \to \mathbb{R}$ *zachodzi*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f d\mu_n = \int_E f d\mu.$$

Def. 83. *Niech* $X, X_1, X_2, \ldots$ *będą zmiennymi losowymi o rozkładach* $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ *odpowiednio. Mówimy, że ciąg* (X_n) *jest zbieżny według rozkładu do* X, *jeżeli ciąg* (μ_n) *słabo zbiega do* μ, *co zapisujemy* $X_n \xrightarrow{d} X$.

Tw. 67. *Następujące warunki są równoważne:*

a) Ciąg (μ_n) *słabo zbiega do* μ,

b) $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \leqslant \mu(F)$ *dla każdego domkniętego zbioru* F,

c) $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(G) \geqslant \mu(G)$ *dla każdego otwartego zbioru* G,

d) $\lim_{n\to\infty} \mu_n(B) = \mu(B)$ *dla każdego zbioru* B *takiego, że* $\mu(\partial B) = 0$.

Tw. 68 (Scheffe). *Niech* μ *będzie miarą* σ*-skończoną oraz funkcje* f_n *i* f *będą nieujemne i takie, że miary*

$$\nu_n(A) = \int_A f_n d\mu, \quad \nu(A) = \int_A f d\mu$$

są miarami probabilistycznymi. Niech ponadto $f_n \to f$ *p.n. względem miary* μ. *Wówczas*

$$\sup_A |\nu_n(A) - \nu(A)| \to 0.$$

Mówimy wtedy, że miary ν_n *zbiegają do miary* ν *w normie całkowitej wariancji.*

Tw. 69. *Niech* μ_n, μ *będą rozkładami ciągłymi o gęstościach* f_n, f *odpowiednio. Jeżeli* $f_n \to f$ *p.n. względem miary Lebesgue'a, to ciąg rozkładów* (μ_n) *słabo zbiega do rozkładu* μ.

5.4 Prawa wielkich liczb

5.4.1 Słabe prawa wielkich liczb

Def. 84 (SPWL). *Mówimy, że ciąg* (X_n) *spełnia słabe prawo wielkich liczb, jeżeli ciąg zmiennych losowych* $(\frac{1}{n}(S_n - ES_n))$ *jest zbieżny według prawdopodobieństwa do zera, tzn. dla kazdego* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n - ES_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n - ES_n}{n}\right| \leqslant \varepsilon\right) = 1.$$

Tw. 70 (PWL Bernoulliego). *Jeżeli* $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ *ma rozkład dwumianowy* $Bin(n, p)$, *to dla każdego* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) = 1.$$

Tw. 21 (Rao-Blackwella). *Jeżeli* $\hat{g}$ *jest estymatorem nieobciążonym funkcji* $g(\theta)$ *i jeżeli* T *jest statystyką dostateczną dla rodziny rozkładów* $\mathfrak{P}$, *to* $E_\theta(\hat{g}|T)$ *jest estymatorem nieobciążonym o wariancji jednostajnie nie większej od wariancji* $\hat{g}$.

Tw. 22 (Lehmanna-Scheffego). *Dla dowolnego estymatora nieobciążonego* $S(X)$ *parametru* θ *estymator postaci*

$$E_\theta\left(S(X)|T\right)$$

(gdzie T *jest statystyką dostateczną zupełną) jest ENMW.*

Lem. 23. *Dla dowolnego estymatora* $\hat{\theta}$ *jego błąd średniokwadratowy jest sumą jego wariancji i kwadratu obciążenia, tj.*

$$E(\hat{\theta} - \theta)^2 = Var(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2.$$

Lem. 24. *Jeżeli estymator jest nieobciążony to jego błąd średniokwadratowy (ryzyko) jest równe wariancji.*

Def. 33 (Funkcja informacji Fishera).

$$I(\theta) = E_\theta\left(\frac{\partial ln f(X,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 = n \cdot E_\theta\left(\frac{\partial ln f_i(X_i,\theta)}{\partial\theta}\right)^2$$

Lem. 25. *Przy spełnionych założeniach nierówności Rao-Cramera zachodzi:*

$$I(\theta) = -E_\theta\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f_\theta(X)\right)$$

Tw. 26 (Nierówność Rao-Cramera).

$$Var\,\hat{\theta}_n \geqslant \frac{1}{I(\theta)}$$

Tw. 27. *Niech będą spełnione założenia nierówności Rao-Cramera. Wtedy estymator nieobciążony o wariancji* $I(\theta)^{-1}$ *istnieje* $\Longleftrightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_\theta(x) = a(\theta)\left(\tilde{\theta}(X) - \theta\right)$$

Wtedy $\tilde{\theta}(X)$ *jest ENMW dla* θ *oraz* $a(\theta) = I(\theta)$.

Def. 34 (Efektywność estymatora). *Efektywnością estymatora* $\hat{\theta}$ *nazywamy funkcję*

$$ef_\theta(\hat{\theta}) = \left(\frac{Var_\theta(\hat{\theta})}{\frac{1}{I(\theta)}}\right)^{-1} = \frac{1}{Var_\theta(\hat{\theta}) \cdot I(\theta)}.$$

Def. 35 (Estymator najefektywniejszy). $\hat{\theta} : \forall\theta \quad ef_\theta(\hat{\theta}) = 1$

Lem. 28. *Jeśli estymator jest estymatorem najefektywniejszym to jest on również ENMW. (Implikacja odwrotna jest nieprawdziwa)*

Def. 36 (Błąd standardowy estymatora). *Błędem standardowym estymatora* $\hat{\theta}$ *parametru* θ *nazywamy dowolny estymator jego odchylenia standardowego* $\sigma(\hat{\theta})$ *i oznaczamy go* $SE(\hat{\theta})$.

Def. 37 (Estymator studentyzowany). *Niech* $\hat{\theta}$ *będzie nieobciążonym estymatorem parametru* θ. *Wówczas studentyzowanym estymatorem* θ *nazywamy wielkość*

$$\frac{\hat{\theta} - \theta}{SE(\hat{\theta})}.$$

Def. 38 (Funkcja centralna). *Funkcją centralną nazywamy funkcję* $t(X, \theta)$, *której rozkład nie zależy od* θ *i która dla każdego* $X = x$ *jest monotoniczną funkcją* θ.

Def. 39 (Konstrukcja zbiorów ufności). *Wyznaczamy stałe* t_1, t_2 *takie, że* $P_\theta(t_1 \leqslant t(X, \theta) \leqslant t_2) = 1 - \alpha$.

$$t_1 \leqslant t(X,\theta) \leqslant t_2 \iff \hat{\theta}_1(X) \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_2(X)$$

Przedział $\langle\hat{\theta}_1(X); \hat{\theta}_2(X)\rangle$ *jest przedziałem ufności dla* θ *na poziomie ufności* $1 - \alpha$.

Def. 40 (Przedział ufności). *Para statystyk* $L(X), U(X)$ *określa przedział ufności na poziomie ufności* $1 - \alpha$, $\alpha \in (0, 1)$ *- ustalone.*

1) Jeżeli $P_\theta[L(X) \leqslant \theta \leqslant U(X)] \geqslant 1 - \alpha$ *to* $[L(X), U(X)]$ *- przedział ufności dla* θ *na poziomie ufności* $1 - \alpha$

2) Jeżeli $P_\theta[L(X) \leqslant \theta] \geqslant 1 - \alpha$ *to* $[L(X), +\infty]$ *- przedział ufności dla* θ *na poziomie ufności* $1 - \alpha$

3) Jeżeli $P_\theta[\theta \leqslant U(X)] \geqslant 1 - \alpha$ *to* $[-\infty, U(X)]$ *- przedział ufności dla* θ *na poziomie ufności* $1 - \alpha$

Def. 41 (Asymptotyczny przedział ufności). *Przedział* $\langle\underline{g}_n; \overline{g}_n\rangle$, *gdzie* $\underline{g}_n = \underline{g}(x_1, \ldots, x_n)$ *i* $\overline{g}_n = \overline{g}(x_1, \ldots, x_n)$, *jest asymptotycznym przedziałem ufności dla* $g(\theta)$ *na poziomie* $1 - \alpha$, *jeżeli*

$$\forall_{\theta\in\Theta} \lim_{n\to\infty} P_\theta\left(\underline{g}_n \leqslant g(\theta) \leqslant \overline{g}_n\right) \geqslant 1 - \alpha$$

2.3.2 Metody wyznaczania estymatorów

Def. 42 (Metoda momentów).

$$\overline{x} = EX = f(\theta) \Rightarrow \theta = f^{-1}(x)$$

Def. 43 (Metoda największej wiarygodności).

$$f(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \Pi_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$$

$$\hat{\theta} : \frac{\partial \ln f(x_1, \ldots, x_n, \theta)}{\partial \theta} = 0$$

3 Testowanie hipotez statystycznych

Def. 44 (Test zrandomizowany). *Test $H_0 \colon \theta \in \Theta_0$ przeciw $H_1 \colon \theta \in \Theta_1$ utożsamiamy z funkcją $\varphi \colon (X) \to \langle 0; 1 \rangle$ taką że jeżeli $\varphi(x) = 0$ to nie odrzucamy H_0, jeżeli $\varphi(x) = 1$ to odrzucamy H_0, a jeżeli $\varphi(x) \in (0; 1)$, to uruchamiamy losowanie niezależne od próby losowej X, w którym odrzucamy H_0 z prawdopodobieństwem $\varphi(x)$.*

Def. 45 (Test niezrandomizowany).

$$\varphi \colon \mathfrak{X} \to \{0; 1\}$$

Def. 46 (Obszar krytyczny testu).

$$W = \{x \in \mathfrak{X} \colon \varphi(x) = 1\}$$

Wtedy $\varphi(x) = \chi_W(x)$

Def. 47. *Test hipotezy H_0 na poziomie istotności α jest to każdy test φ taki, że*

$$\forall_{\theta \in \Theta} E_\theta \left(\varphi(X) \right) \leqslant \alpha$$

Dla testu niezrandomizowanego

$$E_\theta \left(\varphi(X) \right) = P_\theta(X \in W)$$

Def. 48 (Błąd I rodzaju). *Odrzucenie prawdziwego H_0*

Def. 49 (Błąd II rodzaju). *Przyjęcie fałszywego H_0*

Def. 50 (Poziom istotności; rozmiar testu). $\alpha = P\{\mathbf{x_n} \in W | H_0\}$ = *P(I rodz.)*

Def. 51. $\beta = P\{\mathbf{x_n} \in (X \setminus W | H_1\}$ = *P(II rodz.)*

Def. 52 (Moc testu). $P\{\mathbf{x_n} \in W | H_1\} = M(W) = 1 - \beta$

Def. 53. *Funkcja mocy testu jest to funkcja $\pi \colon \Theta \to \langle 0; 1 \rangle$,*

$$\pi(\theta) = E_\theta \left(\varphi(X) \right), \theta \in \Theta_1$$

Def. 54 (Test nieobciążony). *Dla $\alpha \in (0, 1)$ $P\{\mathbf{x_n} \in W | H_0\} = \alpha \wedge P\{\mathbf{x_n} \in W | H_1\} > \alpha$*

Def. 55 (Test zgodny). $\lim_{n \to \infty} P\{\mathbf{x_n} \in W | H_1\} = 1$

Tw. 29 (Porównanie mocy testów). *Założenia: $W, W^* \in \mathfrak{X} \wedge P\{\mathbf{x_n} \in W^* | H_0\} \leqslant P\{\mathbf{x_n} \in W | H_0\}$*
Jeżeli $M(W^*) = P\{\mathbf{x_n} \in W^* | H_1\} \geqslant P\{\mathbf{x_n} \in W | H_1\} = M(W)$ to test oparty na W^* jest jednostajnie mocniejszy od testu opartego na W

3.1 Testy najmocniejsze

Def. 56 (Test najmocniejszy). *Test, który minimalizuje β przy zadanym α*

Lem. 30 (Neymana - Pearsona). *Niech R będzie dowolnym zbiorem w $\mathfrak{X}$ takim, że $P_{\theta_0}(R) \leqslant \alpha$. Przypuśćmy że istnieje zbiór $R^* \subset \mathfrak{X}$, gdzie $R^* = \{x \colon \frac{p_1(x)}{p_0(x)} \geqslant K\}$, dla którego $P_{\theta_0}(R^*) = \alpha$. Wtedy $P_{\theta_1}(R^*) \geqslant P_{\theta_1}(R)$.*

Lem. 31 (Wniosek z lematu Neymana-Pearsona). *Jeśli β jest mocą testu najmocniejszego na poziomie $\alpha \in (0; 1)$ dla $H_0 \colon P = P_0$ przeciw $H_1 \colon P = P_1$, to $\beta > \alpha$, chyba że $P_0 = P_1$.*

Tw. 56 (O odwrotnym przekształceniu Fouriera). *Rozkład prawdopodobieństwa μ, który ma całkowalną funkcję charakterystyczną φ, ma także ograniczoną i ciągłą gęstość f, daną wzorem*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \varphi(s) ds.$$

Tw. 57. *Jeżeli funkcja charakterystyczna φ zmiennej losowej X jest okresowa o okresie 2π, to X jest zmienną losową typu dyskretnego, przyjmującą tylko wartości całkowite*

$$P(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} e^{-itk} \varphi(t) dt.$$

5.3 Zbieżności probabilistyczne

Def. 80. *Ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do zmiennej losowej X:*

a) prawie na pewno, jeżeli

$$P\left(\{\omega : \lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} \right) = 1,$$

co oznaczamy $X_n \xrightarrow{1} X$,

b) według prawdopodobieństwa, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} P\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) = 0,$$

co oznaczamy $X_n \xrightarrow{P} X$,

b) według p-tego momentu (w L^p), $0 < p < \infty$, jeżeli $E|X|^p < \infty$, $E|X_n|^p < \infty$ dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz

$$\lim_{n \to \infty} E|X_n - X|^p = 0,$$

co oznaczamy $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

Tw. 58 (Warunek równoważny zbieżności prawie na pewno).

$$X_n \xrightarrow{1} X \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 : \lim_{N \to \infty} P\left(\sup_{k \geqslant N} |X_k - X| \geqslant \varepsilon \right) = 0$$

Tw. 59. *Jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X_n - X| \geqslant \varepsilon\right) < \infty$, to $X_n \xrightarrow{1} X$.*

Tw. 60. *Jeżeli $EX_n^2 < \infty$, $EX^2 < \infty$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} E(X_n - X)^2 < \infty$, to $X_n \xrightarrow{1} X$.*

Tw. 61 (Twierdzenie o dwóch szeregach). *Jeśli $(X)_n)$ - niezależne zmienne losowe oraz*

$$\sum EX_n < \infty \quad \sum VaR\, X_n < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum X_n \text{ zb. p.n.}$$

Tw. 62 (Warunki Cauchy'ego). *Zachodzą następujące warunki Cauchy'ego:*

a)

$$X_n \xrightarrow{1} X \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 : \lim_{N \to \infty} P\left(\bigcap_{n,m \geqslant N} |X_n - X_m| < \varepsilon \right) = 1,$$

b)

$$X_n \xrightarrow{P} X \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 : \lim_{n,m \to \infty} P\left(|X_n - X_m| > \varepsilon\right) = 0.$$

Tw. 63. *Zachodzą następujące implikacje:*

a) Jeżeli $X_n \xrightarrow{1} X$, to $X_n \xrightarrow{P} X$,

b) Jeżeli $X_n \xrightarrow{L^p} X$, to $X_n \xrightarrow{P} X$,

c) Jeżeli $X_n \xrightarrow{L^p} X$, $p \geqslant q$ to $X_n \xrightarrow{L^q} X$,

5.1 Funkcje zmiennych losowych

Tw. 48. *Jeżeli zmienna losowa* $X:\Omega\to(a,b)$, $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$ *ma rozkład o gęstości* f_X *oraz* $\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}$ *jest klacy* C^1 *oraz* $\varphi\neq 0$. *to zmienna losowa* $Y=\varphi(X)$ *ma rozkład o gęstości*

$$f_Y(y)=f_X(h(y))|h'(y)|I_{\varphi(a,b)}(y),$$

gdzie $h=\varphi^{-1}$.

Tw. 49. *Załóżmy, że znamy gęstość* $f_{X,Y}$ *wektora dwuwymiarowego* (X,Y) *oraz, że dany jest wektor* $(U,W)=(\varphi_1(X,Y),\varphi_2(X,Y))$. *Zatem mamy*

$$\begin{matrix} u=\varphi_1(x,y) & x=\phi_1(u,w)\\ w=\varphi_2(x,y) & y=\phi_2(u,w)\end{matrix}$$

wtedy Jakobian J *wyraża się wzorem*

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial\phi_1}{\partial u} & \frac{\partial\phi_1}{\partial w}\\ \frac{\partial\phi_1}{\partial u} & \frac{\partial\phi_2}{\partial w}\end{vmatrix}$$

natomiast funkcja gęstości wektora losowego (U,W) *wygląda następująco*

$$f_{U,W}(u,w)=|J|\cdot f_{X,Y}(\phi_1(u,w),\phi_2(u,w)).$$

Tw. 50 (Addytywność rozkładu Gamma). *Jeżeli* $X_i\sim\Gamma(\lambda,s_i)=\chi_{R++}\frac{\lambda^s}{\Gamma(s)}x^{s-1}e^{-\lambda x}$ *to*

$$\theta X_i\sim\Gamma(\lambda,\theta s_i)$$

oraz dla sumy

$$\sum_i X_i\sim\Gamma(\lambda,\sum s_i)$$

5.2 Funkcje charakterystyczne

Def. 78 (Funkcja charakterystyczna). *Funkcją charakterystyczną zmiennej losowej* $X:\Omega\to\mathbb{R}$ *nazywamy funkcję* $\varphi_X:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, *daną wzorem*

$$\varphi_X(t)=Ee^{itX}\qquad t\in\mathbb{R}.$$

Tw. 51 (Własności funkcji charakterystytcznych). *Niech* φ_X *będzie funkcją charakterystyczną zmiennej losowej* X. *Wtedy*

1. $\varphi_X(0)=1$
2. $|\varphi_X(t)|\leqslant 1$
3. $\varphi_X(t)=\overline{\varphi_X(-t)}$
4. $\varphi_X(t)$ *jest jednostajnie ciągła*

Def. 79. *Funkcję* $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *nazywamy dodatnio określoną wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego naturalnego* n, *dla każdego ciągu* $t_1,...,t_n$ *liczb rzeczywistych i zespolonych* $z_1,...,z_n$ *mamy*

$$\sum_{k,l\leqslant n}\varphi(t_k-t_l)z_k\overline{z_l}\geqslant 0.$$

Tw. 52 (Bochnera). *Funkcja* φ *jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu prawdopodobieństwa wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągła, dodatnio określona i* $\varphi(0)=1$.

Tw. 53. *Jeśli* $E|X|^n<\infty$, $n\in\overline{\mathbb{N}}$, *to* n*-ta pochodna funkcji charakterystycznej* $\varphi_X^{(n)}$ *istnieje i jest jednostajnie ciągła, a ponadto*

$$\varphi_X^{(n)}(0)=i^nEX^n.$$

Tw. 54. *Jeśli* X, Y *są niezależnymi zmiennymi losowymi, to*

$$\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t).$$

Tw. 55. *Jeśli rozkłady prawdopodobieństwa* μ *i* ν *na* $(\mathbb{R},\mathbb{B}(\mathbb{R}))$ *mają równe funkcje charakterystyczne, czyli* $\varphi_\mu(t)=\varphi_\nu(t)$ *dla wszystkich* $t\in\mathbb{R}$, *to* $\mu=\nu$.

Def. 57 (Monotoniczny iloraz wiarygodności). *Mówimy, że rodzina rozkładów* $\{P_\theta:\theta\in\Theta\}$ *jest rodziną rozkładów z monotonicznym ilorazem wiarygodności, jeżeli istnieje taka funkcja* $T(x)$, *że dla* $\theta'>\theta$ *iloraz*

$$\frac{p_{\theta'}(x)}{p_\theta(x)}$$

jest niemalejącą funkcją argumentu $T(x)$.

Tw. 32. *Rodzina rozkładów o funkcji prawdopodobieństwa* $p_\theta(x)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$, $\theta\in(0;1)$ *jest rodziną o monotonicznym ilorazie wiarygodności.*

Tw. 33. *Jednoparametrowa rodzina wykładnicza* $p_\theta(x)=e^{c(\theta)t(x)-b(\theta)}h(x)$ *jest rodziną o monotonicznym ilorazie wiarygodności.*

Tw. 34. *Rodzina rozkładów jednostajnych* $U(0;\theta)$, $\theta>0$ *jest rodziną o monotonicznym ilorazie wiarygodności.*

Tw. 35 (Test JNM dla monotonicznego ilorazu wiarygodności). *Niech* $H_0:\theta\leqslant\theta_0$, $H_1:\theta>\theta_0$, *a* $\{p_\theta:\theta\in\Theta\}$ *jest rodziną rozkładów z monotonicznym ilorazem wiarygodności. Wówczas:*

a) *Dla weryfikacji* H_0 *przeciw* H_1 *istnieje test jednostajnie najmocniejszy określony jako:*

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \text{dla } T(x)>k\\ c & \text{dla } T(x)=k\\ 0 & \text{dla } T(x)<k\end{cases}$$

gdzie stałe c, k *są wyznaczone z warunku* $E_{\theta_0}\varphi(X)=\alpha$.

b) *Funkcja* $\beta(\theta)=E_\theta\varphi(X)=P_\theta(T(x)>k)$ *jest ściśle rosnąca w zbiorze w którym* $\beta(\theta)<1$.

c) *Dla każdego* θ' *test zdefiniowany w a) jest jednostajnie najmocniejszy dla* $H_0':\theta\leqslant\theta'$ *przeciw* $H_1':\theta>\theta'$ *na poziomie istotności* $\alpha'=\beta(\theta)$.

d) *Dla dowolnego* $\theta<\theta_0$ *test z a) minimalizuje prawdopodobieństwo błędu I rodzaju* $\beta(\theta)$ *wśród wszystkich testów spełniających* $E_{\theta_0}(X)=\alpha$.

Lem. 36 (Wniosek). *Jeżeli* $\{P_\theta:\theta\in\Theta\}$ *jest rodziną wykładniczą o gęstościach*

$$p_\theta(x)=e^{c(\theta)T(x)-b(\theta)}h(x)$$

i jeżeli $c(\theta)$ *jest funkcją ściśle rosnącą, to test JNM* $\varphi(x)$ *ma postać jak w punkcie a powyższego twierdzenia. Jeśli* $c(\theta)$ *jest funkcją ściśle malejącą to w definicji testu* φ *znaki nierówności zmieniają się na przeciwne.*

3.2 Testy ilorazowe

Def. 58. *Wiarogodnością hipotezy* H_i $(i=0;1)$ *gdy zaobserwowano* x *nazywamy liczbę*

$$L_{H_i}(x)=\sup_{\theta\in\Theta_i}L(x;\theta)$$

Def. 59 (Iloraz wiarogodności). $\lambda(x)=\frac{L_{H_1}(x)}{L_{H_0}(x)}$

Def. 60 (Obszar krytyczny). $W=\{x:\lambda(x)>k\}$ *gdzie* k *jest takie, aby* $\sup_{\theta\in\Theta_0}P_\theta(\lambda(x)>k)=\alpha$. *Jeśli z powodu dyskretności rozkładu nie zachodzi powyższa równość, wtedy ustala się* k' *tak, aby* $P_\theta(\lambda(x)>k')\leqslant\alpha<P_\theta(\lambda(x)>k'-1)$

Tw. 37 (Rozkład ilorazu wiarogodności w dużych próbach). *Przy następujących założeniach:*

- $X=X_1,\dots,X_n$ *- próba losowa*
- $\Theta\in\mathbb{R}^s$
- *Hipoteza* H_0 *oraz zbiór* Θ_0 *określone przez układ liniowo niezależnych warunków postaci* $h_j(\theta)=0$, $j=1,\dots,r$
- $\theta'\neq\theta''\Rightarrow P_{\theta'}\neq P_{\theta''}$
- $L(X,\theta)=p_\theta(X)$ *dwukrotnie różniczkowalna w sposób ciągły względem* θ
- $\sup_{\theta\in\Theta_0}L(X,\theta)=L(X,\dot{\theta})$

oraz spełnionych warunkach regularności z nierówności Rao-Cramera, dla zmiennej losowej $2\ln\lambda(X)$ *zachodzi:*

$$2\ln\lambda(X)\xrightarrow{d}\chi^2_r$$

gdzie $\lambda(X)=\frac{L(X,\hat{\theta}_{NW})}{L(X,\dot{\theta})}$, *a* r *jest liczbą równań określających hipotezę* H_0.
Obszar krytyczny testu ma wówczas postać $\{x:2\ln\lambda(X)>k\}$, *gdzie* k *jest kwantylem rzędu* $1-\alpha$ *rozkładu* χ^2_r.

4 Statystyka bayesowska

Ozn. 61 (Rozkªad a priori). ( )

Ozn. 62 (Rozkªad a posteriori). (jx)

Def. 63 (Schemat podstawowy statystyki bayesowskiej)

$$P(\text{hipoteza } j\text{dane}) = \frac{P(\text{dane} j \text{hipoteza }) P(\text{hipoteza })}{P(\text{dane})}$$

Tw. 38 (Rozkªad a posteriori).

$$(\ jx) = \frac{p(x; \ )}{p \ (x)} = \frac{p(x; \ ) \ (\ )}{R \ p(x; \ ) \ (\ )d}$$

p(x;) - g¦sto±¢ prawdopodobie«stwa rozkªadu ª¡cznego,

4.1 Bayesowskie przedziaªy ufno±ci

Def. 64 (Bayesowski przedziaª ufno±ci) Bayesowksim przedziaªem ufno±ci na poziomie 1 nazywamy przedziaª I = < $\hat{}_1; \hat{}_2$ > taki, »e

$$(\ 2 < \hat{}_1; \hat{}_2 > jx) = 1$$

Def. 65 (Bayesowski przedziaª ufno±ci) Najmniejszy zbiór

$$f \ : \ (\ (x)) > K \ g$$

Lem. 39. Dla bayesowskiego przedziaªu ufno±ci zachodzi

$$\int_I (\ jx)d \ = 1$$

Def. 66 (Niewªa±ciwy rozkªad a priori). Je»eli jest zbiorem nieograniczony, ( ) k za± $\int$ ( )d jest niesko«czona to wówczas jest niewªa±ciwym rozkªadem a priori.

4.2 Rodziny sprz¦»one

Def. 67 (Sprz¦»ona rodzina rozkªadów) Rodzin¦ S rozkªadów a priori parametru nazywamy sprz¦»on¡ do rodziny P = f P : 2 g je»eli

$$8P \ 2 P \ 8 \ 2 S \ 8x \ 2 X \ (\ jx) \ 2 S)$$

Lem. 40 (Przykªady rodzin sprz¦»onych).

- próba: X Bin (n;)
  a priori: Beta(;)
  a posteriori: (jx) Beta(+ x; + n x)
- próba: X Poiss( )
  a priori: Gamma(;)
  a posteriori: (jx) Gamma(+ n; + $\sum$ x_i)
  $E (\ ; x) = \frac{}{+n} E + \frac{n}{+n} \bar{X}$
- próba: X N (; ^{2})
  a priori: N (; ^{2})
  a posteriori: (jx) $N\left(\frac{\frac{}{^2} + \frac{n\bar{x}}{^2}}{\frac{1}{^2} + \frac{n}{^2}}; \frac{1}{\frac{1}{^2} + \frac{n}{^2}}\right)$
- próba: X N (; $\frac{1}{}$)
  a priori: Gamma(;)
  a posteriori: (jx) Gamma(+ $\frac{\sum (x_i \ )}{2}$); + $\frac{n}{2}$

Def. 68 (Naturalna rodzina wykªadnicza). Naturaln¡ rodzina wykªadnicza nazywamy rodzin¦

$$_{;} (\ ) = K (\ ; \ )e^{(\ )}$$

gdzie K (;) jest staª¡ normuj¡c¡.

Tw. 41. Rozkªad a posteriori dla naturalnej rodziny wykªadniczej ma posta¢

$$(\ jx) = \ _{+x; \ +1} (\ )$$

4.3 Decyzje statystyczne

Ozn. 69. A - zbiór decyzji (akcji)

Ozn. 70 (Strata). L : A ! R
L(; a) - strata gdy obserwacja pochodzi z P i zostaje podj¦ta decyzja a

Ozn. 71 (Reguªa decyzyjna) : X ! A - reguªa decyzyjna a = (x) dla pewnego x

Def. 72 (Funkcja ryzyka reguªy decyzyjnej).

$$R(\ ; \ ) = E \ L \ ; \ (x)$$

Def. 73 (Reguªy optymalne). Mówimy, »e reguªa $_1$ jest nie gorsza ni» $_2$ je»eli

$$8 \ _2 \ R(\ ; \ _1) \neg R(\ ; \ _2)$$

Je±li dodatkowo 9 $_2$ R(; $_1$) < R (; $_2$) to $_1$ jest lepsza od $_2$.

Def. 74 (Reguªa dopuszczalna) Reguªa 2 D jest dopuszczalna, je»eli w D nie ma reguª lepszych od .

Tw. 42 (O redukcji przez dostateczno±¢) Niech A 2 R^k - zbiór wypukªy, a 8 L(;) - wypukªa funkcja decyzji. Je»eli jest reguª¡ decyzyjn¡ i T jest statystyk¡ dostateczn¡ dla , to reguªa decyzyjna

$$\tilde{} = E (\ (x) jT = t)$$

jest nie gorsza od .

4.4 Reguªy bayesowskie

Def. 75 (Ryzyko bayesowskie)

$$r(\ ; \ ) = E \ R(\ ; \ ) = \int R(\ ; \ ) \ (\ )d \ = E \ E \ L \ ; \ (x)$$

Def. 76 (Reguªa bayesowska) Je»eli dla ustalonego rozkªadu a priori istnieje reguªa decyzyjna taka, »e 8 $_{2D}$ r(;) ¬ r(;), to nazywamy reguª¡ bayesowsk¡ przy rozkªadzie a priori.

Def. 77 (Ryzyko a posteriori).

$$R_x(\ ; \ ) = \int L \ ; \ (x) \ (\ jx)d \ = E \ L(\ ; \ (x)) jx$$

Tw. 43. Wystarczy minimalizowa¢ R_x(;) aby znale¹¢ reguª¦ bayesowsk¡ .

Lem. 44. Je»eli L(; a) = (a)^2, to reguª¡ bayesowsk¡ (estymatorem bayesowskim) jest warto±¢ oczekiwana rozkªadu a posteriori.

Lem. 45. Je»eli L(; a) = j aj, to reguª¡ bayesowsk¡ jest mediana rozkªadu a posteriori.

5 Rachunek prawdopodobie«stwa

Tw. 46. Wªasno±ci wariancji:

1. $Var(X + c) = Var(X)$
2. $Var(aX) = a^2 Var(x)$

Ponadto, je»eli X; Y s¡ niezale»nymi zmiennymi losowymi to zachodzi

1. $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$
2. $Var(X \ Y) = Var(X) + Var(Y)$

Tw. 47.

$$Var(X) = E(X^2) \ (EX)^2$$