Łańcuchy Markowa

Def. 1 (Macierz stochastyczna).

$$P = [p_{ij}]_{r\times r}: \quad \forall i = 1,\dots,r \sum_{j=1}^{r} p_{ij} = 1$$

Def. 2 (Macierz podwójnie stochastyczna). *Macierz stochastyczna, gdzie dodatkowo*

$$\forall j = 1,\dots,r \sum_{i=1}^{r} p_{ij} = 1$$

Tw. 1. *W każdej macierzy stochastycznej*[1]

$$\lambda_1 = 1 \quad \wedge \quad \forall i \quad |\lambda_i| \leqslant 1$$

Def. 3 (Macierz rozkładalna). *Macierz, dla której*[2] $n_1 > 1$

Def. 4 (Macierz nierozkładalna). *Macierz, dla której* $\lambda_1 = 1$ $n_1 = 1$

Def. 5 (Macierz cykliczna). *Macierz, dla której*

$$\exists \lambda_i \neq 1: \quad |\lambda_i| = 1$$

Def. 6 (Macierz niecykliczna). *Macierz, dla której*

$$\nexists \lambda_i \neq 1: \quad |\lambda_i| = 1$$

Def. 7 (Macierz regularna). *Macierz niecykliczna i nierozkładalna*

Def. 8 (Skończony Łańcuch Markowa). *Proces stochastyczny taki, że*

$$\forall i, j, i_0, i_1, \dots, i_{n-2} \in S \quad P(X_n = j | X_{n-1} = i, X_{n-2} = i_{n-2}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_n = j | X_{n-1} = i) \overset{ozn.}{=} p_{ij}^{(n)}$$

Def. 9 (Macierz ergodyczna (E)). *Macierz o wszystkich wierszach identycznyh*

Def. 10 (Rozkład bezwarunkowy łańcucha).

$$d_n = [d_{n1}, \dots, d_{nr}] \qquad d_{ni} = P(X_n = 1)$$
$$d_n = d_{n-1}P = d_0 P^n$$

Tw. 2.

$$\forall 1 < m < n \quad p_{ij}^{(n)} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n-m)}$$

Tw. 3. *Dla macierzy ergodycznej*

$$E = E^2 = E^n$$

Def. 11 (Stany skomunikowane).

$$\exists k_1, k_2 \quad p_{ij}^{(k_1)} > 0 \wedge p_{ji}^{(k_2)} > 0$$

Def. 12 (Stan chwilowy). *Stan taki ,że można* $i \to j$*, ale nie można* $j \to i$ *(w dowolnej liczbie kroków)*

Def. 13 (Stan istotny). *Stan taki ,że można* $i \to j$*, to można* $j \to i$ *(w dowolnej liczbie kroków)*

Def. 14 (Stan okresowy). *Powrót możliwy tylko w* $kt \wedge t > 1$ *kroków*

Def. 15 (Stan pochłaniający).

$$p_{ii} = 1$$

[1] Po odpowiedniem przenumerowaniu wektorów własnych
[2] n_1 - krotność algebraiczna wartości własnej $\lambda_1 = 1$

Def. 16 (Macierz przywiedlna (redukowalna)). *Macierz, w której można tak przenumerować stany, żeby otrzymać*

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{bmatrix}$$

Gdzie $\mathbf{T}$ *jest macierzą stochastyczną*

Tw. 4. *Jeżeli macierz jest rozkładalna to jest przywiedlna*

Tw. 5. *Jeżeli macierz jest nierozkładalna i:*

- *Wszystkie stany istotne są jednej klasy to jest nieprzywiedlna*
- *Istnieje więcej niż jedna klasa stanów istotnych to jest przywiedlna*

Tw. 6. *Jeżeli macierz jest rozkładalna to istnieje więcej niż jedna klasa stanów chwilowych i mogą istnieć stany okresowe:*

Tw. 7. *Jeżeli macierz jest niecykliczna to wszystkie stany są nieokresowe*

Tw. 8. *Jeżeli macierz jest cykliczna i:*

- *nierozkładalna to wszystkie stany są okresowe o jednakowych okresie*
- *rozkładalna to niektóre satny są okresowe*

Def. 17 (Rozkład stacjonarny).

$$\lim_{n\to\infty} d_n = [d_1, \ldots, d_r] \quad gdzie \quad dP = d$$

Tw. 9. *Dla dowolnej macierzy stochastycznej istnieje*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P^k = A \quad \wedge \quad PA = AP = A = A^2$$

Tw. 10. *Dla nierozkładalnej macierzy P istnieje macierz ergodyczna $E = lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P^k$ oraz*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum d_k = d_0 E = e$$

gdzie e jest wierszem E

Tw. 11. *Dla niecyklicznej macierzy P istnieje macierz stochastyczna $A = lim_{n\to\infty} P^n$ oraz*

$$\lim_{n\to\infty} d_n = d_0 A$$

gdzie e jest wierszem E

Def. 18 (Łańcuch ergodyczny).

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = e_j$$

Def. 19 (Łańcuch ergodyczny w sensie Cesaro).

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k p_{ij}^{(k)} = e_j$$